代数幾何学シンポジウム記録
2011年度 pp.123-130

KUGA FIBER SPACE に関する BEILINSON 予想と混合楕円モチーフ

寺杣 友秀

1. 混合楕円モチーフと Hopf 代数の概観

モチーフの理論は普遍的なコホモロジー理論として考えだされた。体 K を固定したとき、モチーフの圏 M_K が次のようにして定義される。まず K 上の完備非特異多様体 X,Y に対してその対応代数 $Cor(X,Y)$ が Chow 群 $CH^{\dim X}(X\times Y)$ として定義される。さらに交差理論をもちいて

$$Cor(Y,Z)\otimes Cor(X,Y)\to Cor(X,Z):(\gamma\otimes\delta)\mapsto p_{X\times Z,*}((\delta\times\gamma)\cap(X\times\Delta_Y\times Z))$$

なる双一次形式が定義される。ここで $\Delta_Y\subset Y\times Y$ は対角部分多様体、$p_{X\times Z,*}$ は写像 $p_{X\times Z}:X\times\Delta_Y\times Z\to X\times Z$ に関する push out である。この双一次写像を積とみなすと、結合的であるから $Cor(X,X)$ には環の構造がはいる。以下 Chow 群の係数は断らないかぎり $\mathbf{Q}$ 係数とする。X を K 上の完備非特異な多様体とし、p を $Cor(X,X)$ のべき単元 ($p^2=p$ を満たす元) としてペア (X,p) を考える。モチーフの圏の対象はこのようなペア (X,p) の形式的な直和として定義する。このとき $M_1=(X_1,p_1),M_2=(X_2,p_2)$ に対して

$$Hom_{M_K}(M_1,M_2)=p_2\cdot Cor(X_1,X_2)\cdot p_1$$

として定義する。たとえば E を体 K 上の楕円曲線としたとき $h^1(E)$ は (E,p) で定義される。ここで p は

$$p=\frac{1}{2}(\Delta_E-\Gamma_\iota)\in CH^1(E\times E)$$

なる Chow 群の元である。ここで Γ_ι は楕円曲線の inversion ι のグラフである。

モチーフの理論を混合モチーフに拡張することが Voevodski, Levine, 花村氏などさまざまな人たちによりなされた。他方、彼らの構成法とは異なる仕方で Bloch と Kriz により考え出された混合 Tate モチーフの構成法は具体的な対象に対して考えるときに考えやすいものになっている。彼らは混合モチーフをある Hopf 代数上の余加群としてとらえた。その Hopf 代数がどれくらいのものなのかがわかれば、混合 Tate モチーフのありようも見やすくなる。このような方法で捕らえやすくなるもののひとつとして、混合楕円モチーフがある。(純粋) モチーフの理論が Chow 群から射が構成されるのに対して混合モチーフの理論は射は高次 Chow 群から構成される。より詳しく言えば、高次 Chow 群の定義の際に用いた Bloch 高次サイクル群からなる複体を射とする、微分次数圏から定義される。

K を体、E を K 上の楕円曲線として以下固定する。多くの構成法は基礎体 K の代わりに多様体 S を考えその上の楕円曲線の族をひとつ固定して考えても同様にできる。大雑把にいえば、E に対する混合楕円モチーフの圏 $MEM(E/K)$ とは上に定義した $h^1(E)$ の拡大を繰り返してできるものを対象とする微分次数

圏である。$MEM(E/K)$ を定義するためには、まず微分次数圏 $EM(E/K)$ を定義する。V を $\mathbf{Q}$ 上の 2 次元ベクトル空間とする。$GL(V)$ の既約表現 $W_1 = Sym^{n_1}(V) \otimes \det(V)^{\otimes p_1}$, $W_2 = Sym^{n_2}(V) \otimes \det(V)^{\otimes p_2}$ を考える。このとき

$$Hom^i_{EM(E/K)}(W_1, W_2) = alt_{n_2} \cdot Z^*(E^{n_1} \times E^{n_2}, *)_- \cdot alt_{p_1}$$

によって定義すると、i に関して complex となる。ここで alt_n は対称群 $frakS_n$ の作用において符号で作用する部分加群をあらわし、下の添え字の $-$ は楕円曲線の各成分の直積において inversion が -1 で作用する部分をあらわす。さらに W_1, W_2, W_3 を $GL(V)$ の既約表現としたとき、双一次形式を自然に延長する形で複体の積写像

$$Hom^i_{EM(E/K)}(W_2, W_3) \otimes Hom^j_{EM(E/K)}(W_1, W_2) \to Hom^{i+j}_{EM(E/K)}(W_1, W_3)$$

が定義される。より正確にはこの写像は quasi-isomorphism な部分加群で取り替えなければ定義されていないので、やや注意が必要である。この複体の積写像は自然に既約表現の直和の形のものに延長される。さらに $W_1 = Sym^{n_1}(V) \otimes \det(V)^{\otimes p_1}$ の重さ $wt(W_1)$ を $wt(W_1) = n_1 + 2p_1$ として重さの概念が導入される。既約表現 W_1, W_2 に対して $W_1 = W_2$ のときは $w = wt(W_1)$ として

$$\begin{aligned}
&Hom^0_{EM(E/K)}(W_1, W_2) \\
&\to alt_w \cdot CH^w(E^w \times E^w) \cdot alt_w \\
&\to alt_w \cdot \left[CH^w(E^w \times E^w)/(\text{homological equivalence}) \right] \cdot alt_w \\
&\simeq \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

から complex の射 $\omega : Hom^\bullet_{EM(E/K)}(W_1, W_2) \to \mathbf{Q}$ が定まる。$W_1 \neq W_2$ の時には 0 写像として線形に拡張して augmentation homomorphism $EM(E/K) \to (Rep_{GL(V)})$ なる微分次数関手が定まる。

この $EM(E/K)$ を基本として微分次数圏 $MEM(E/K)$ を構成する。この構成法は Bodal-Kapranov、花村氏の論文に現れるものと（次数などののシフトや符号を除き）同一のものである。$MEM(E/K)$ の対象 M は $EM(E/K)$ の列 $\{M_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ と、$i < j$ に対する次数 $i - j + 1$ の射 $d_{ji} \in Hom^{i-j+1}(M_i, M_j)$ の組 $(\{M_i\}_i, \{d_{ji}\}_{i<j})$ で

$$\delta(d_{ji}) = \sum_{i<k<j} \pm d_{jk} \circ d_{ki}$$

を満たすものである。$MEM(E/K)$ の対象 $M^{(1)}, M^{(2)}$ に対しては複体 $Hom_{MEM(E/K)}(M^{(1)}, M^{(2)})$ が定まり、さらに合成も複体の積写像として定まり、それらは微分次数圏をなす。このときこの微分次数圏はバー複体

(1.1)

$$Bar(E/K) = \left(\cdots \to Bar(E/K)_2 \to Bar(E/K)_1 \to Bar(E/K)_0 \to 0 \right)$$

を用いて捕らえることができる。ここで

$$\begin{aligned}
Bar(E/K)_n = \oplus_{V_0,\dots,V_n \in Irr(GL(V))} V_n^* \otimes Hom^\bullet_{MEM(E/K)}(V_{n-1}, V_n) \otimes \cdots \\
\otimes Hom^\bullet_{MEM(E/K)}(V_0, V_1) \otimes V_0
\end{aligned}$$

である。この複体はうまく qusi-isomorphism で取り替えることにより、シャッフル積が定義され、微分次数 Hopf 代数の構造を導入することができる。次の定理は混合楕円モチーフを考える際に基本的な定理である。

定理 1.1. *$EME(E/K)$ は微分次数 Hopf 代数 $Bar(E/K)$ 上の余微分次数加群のなす微分次数圏とホモとピー同値である。*

微分次数 Hopf 代数の構成とホモとピー同値性については [KT] を参照のこと。混合楕円モチーフの圏の部分圏で興味深いものが次数が 0 に集中している対象のなす full subcategory$MEM(E/K)^0$ である。この定理を用いると、$MEM(E/K)^0$ の対象は Hopf 代数 $H^0(Bar(E/K))$ 上の余加群が定める。楕円多重対数に対応するモチーフや楕円曲線から原点を除いた曲線の基本群の群環のべき零完備化などは $MEM(E/K)^0$ の対象なので Hopf 代数 $H^0(Bar(E/K))$ をより詳しく研究することは重要である。バー複体のコホモロジーを計算するには次のバースペクトル系列が有用である。

命題 1.2. *次のスペクトル系列が存在する。*

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} = & \bigoplus_{\substack{p=-n \\ q=\sum_k i_k \\ V_0,\dots,V_n \in Irr(GL(V))}} V_n^* \otimes Ext^{i_n}_{MEM(E/K)}(V_{n-1}, V_n) \otimes \cdots \\ & \qquad\qquad \otimes Ext^{i_1}_{MEM(E/K)}(V_0, V_1) \otimes V_0 \\ \Rightarrow & E_\infty^{p+q} = H^{p+q}(Bar(E/K)) \end{aligned}$$

このスペクトル系列の E_1-term から次の写像がえられる。

$$\begin{aligned} d_1 : & V_3^* \otimes Ext^1_{MEM(E/K)}(V_2, V_3) \otimes Ext^1_{MEM(E/K)}(V_1, V_2) \otimes V_1 \\ & \to V_3^* \otimes Ext^2_{MEM(E/K)}(V_1, V_3) \otimes V_1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

スペクトル系列の E_1-term は混合楕円モチーフの淡中基本群の生成系の双対空間であり、上の写像は生成系の交換しの間の関係式を与える。

$$Ext^i_{MEM(E/K)}(\mathbf{Q}, V) = H^i_{MEM(E/K)}(V)$$

とおくと、

$$Ext^i_{MEM(E/K)}(V_1, V_2) = \oplus_{V_3} Hom_{GL(2)}(V_3, V_1^* \otimes V_3) \otimes H^i_{MEM}(K, V_3)$$

となるので (1.2) は

$$H^i_{MEM(E/K)}(V_1) \otimes H^i_{MEM(E/K)}(V_2) \to H^i_{MEM(E/K)}(V_1 \otimes V_2) \tag{1.3}$$

なる写像から得られる。

2. モジュライ空間の上の普遍楕円曲線に付随する混合楕円モチーフ

$\mathcal{M}_{1,1}$ を $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線のモジュライ・スタックとして、 $E \to \mathcal{M}_{1,1}$ をその上の普遍楕円曲線とする。前章で体上の楕円曲線が与えられたときの混合楕円モチーフについて述べたが、同様の構成法により $\mathcal{M}_{1,1}$ 上の E に付随する混合楕円モチーフを考えることができる。この微分次数圏を $MEM(E/\mathcal{M}_{1,1})$ と書く。このと l 進 etale 実現関手 ω_l と Hodge 実現関手 ω_{Hg} が考えられる。

2.1. l **進 etale 実現** ([HM]). $\mathcal{M}_{1,1}$ 上の l 進層 $R^1f_*\mathbf{Q}_l$ と $GL(2)$ の既約表現 V_1 に対して $\mathcal{M}_{1,1}$ 上の l 進層 $V_1(R^1f_*Q_l)$ が定義される。このとき Hom 層の simplicial Godement resolution $G(\underline{Hom}(V_1(R^1f_*\mathbf{Z}_l), V_2(R^1f_*\mathbf{Z}_l))$ の global section を $Hom^{\bullet}_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_1,V_2)$ として定義すると、simplicial Godement resolution の積構造を用いて

$$\begin{aligned}&Hom^{\bullet}_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_2,V_3)\otimes Hom^{\bullet}_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_1,V_2)\\&\to Hom^{\bullet}_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_1,V_3)\end{aligned}$$

なる写像が定義される。この複体 $Hom^{\bullet}_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_1,V_2)$ と積構造と $\mathcal{M}_{1,1}$ の幾何学的点 $\bar{\eta}$ をひとつ選ぶ事によって得られるファイバー関手を用いて (1.1) と同様にして定義されたバー複体を $Bar_{MER}(E/\mathcal{M}_{1,1})$ とかく。このとき実現関手を与えるバー複体のコホモロジーの間の写像

$$H^0(Bar(E/\mathcal{M}_{1,1}))\to H^0(Bar_{MER}(E/\mathcal{M}_{1,1}))$$

が定義される。

命題 2.1. $H^0(Bar_{MER}(E/\mathcal{M}_{1,1}))$ 上の余加群のなす圏は $V_1(R^1f_*\mathbf{Q}_l)$ の拡大の繰り返しで得られてている l 進層で $\bar{\eta}$ でのファイバーが *graded quotient* と *compatible* になる直和分解をもつもののなす圏と同値となる。

バー・スペクトル系列の E_1-term に現れる加群は

$$Ext^i_{MER(E/\mathcal{M}_{1,1})}(V_1,V_2)=Hom_{GL(2)}(V_3,V_1^*\otimes V_2)\otimes H^i_c(M_{1,1,et},V_3(\mathbf{R}^1f_*\mathbf{Q}_l))$$

と計算される。ここで $H^i_c()$ は continuous etale cohomology である。したがって Bar_{MER} のバー・スペクトル系列に関する d_1 はカップ積

$$\begin{aligned}&H^1_c(\mathcal{M}_{1,1,et},V_1(\mathbf{R}^1f_*\mathbf{Q}_l)))\otimes H^1_c(\mathcal{M}_{1,1,et},V_2(\mathbf{R}^1f_*\mathbf{Q}_l)))\\&\to H^2_c(\mathcal{M}_{1,1,et},(V_1\otimes V_2)(\mathbf{R}^1f_*\mathbf{Q}_l)))\end{aligned}$$

を計算することにより原理的にはわかることになる。

Eichler-Shimura 同型および、continuous etale cohomology に関する Hochschild-Serre のスペクトル系列を用いると、つぎの事が結論される。

命題 2.2 (c.f.[HM]).

$$H^1_c(\mathcal{M}_{1,1,et},Sym^n(\mathbf{R}^1f_*\mathbf{Q}_l)(p))\simeq\begin{cases}\mathbf{Q}_l & (n=0,p=odd,\geq 3)\\ 0 & (n=0,p=even,\geq 2)\\ 0 & (n=odd,\geq 1)\\ 0 & (n=even,\geq 2,p\neq n+1)\\ \mathbf{Q}_l & (n=even,\geq 2,p=n+1)\end{cases}$$

2.2. **Hodge 実現.** $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{1,1}$ のコンパクト化とし ∂ をその境界とする。$f:E\to\mathcal{M}$ に対して relative de Rham cohomology $\mathcal{V}=\mathcal{H}^1_{dR}(E/\mathcal{M})$ には Gauss-Manin 接続が入る。E の $\overline{\mathcal{M}}$ 上のコンパクト化 $f:\overline{E}\to\overline{\mathcal{M}}$ をとり D を $\overline{E}$ の境界とする。logarithmic relative de Rham cohomoloty $R^*\bar{f}_*(\Omega^*_{\overline{E}/\overline{\mathcal{M}}}(\log D/\log\partial))$ を考える事により $\overline{S}$ 上の対数的接続

$$\nabla:\overline{\mathcal{V}}\to\Omega^1_{\overline{\mathcal{M}}}(\log D)\otimes\overline{\mathcal{V}}$$

に延長される。上の$\overline{\mathcal{V}}$にはrelative logarithmic de Rham cohomologyとしてのHodge filtration Fがはいる。$\mathcal{V}_{an}$を$\overline{\mathcal{V}}$をS_{an}に制限した層とし、$V=\mathbf{R}^1f_{an*}\mathbf{Q}$とおくと、これは$\mathcal{M}_{an}$上の局所系となる。さらに自然な同型

$$comp: V\otimes\mathbf{C}\simeq \mathrm{Ker}(\mathcal{V}_{an}\to\Omega^1_{\mathcal{M}_{an}}\otimes\mathcal{V}_{an})$$

が比較定理から得られる。このとき$V_{Hg}=((\overline{\mathcal{V}},\nabla,F),V,comp)$なる3つ組みを考える。このタイプの3つ組を$\mathcal{M}$上のHodge tripleという。Hodge triple V_{Hg}に対して$V_{Hg}^{\otimes n}$や$Sym^n(V_{Hg})$が対数接続のテンソル積とフィルトレーションのテンソル積を使って定義することができる。Hodge tripleに対してinner homやTate twistも定義されて、

$$\begin{aligned}&Hom_{Hg}(Sym^{n_1}(V_{Hg})(p_1),Sym^{n_2}(V_{Hg})(p_2))\\ =&(\mathcal{H}om(Sym^{n_1}(\overline{\mathcal{V}})(p_1),Sym^{n_2}(\overline{\mathcal{V}})(p_2)),\\ &\qquad\mathcal{H}om(Sym^{n_1}(V)(p_1),Sym^{n_2}(V)(p_2)),comp)\end{aligned}$$

もHodge tripleとなる。より一般に$GL(V)$の表現Wに対してもHodge triple $W(V_{Hg})$が定義され、合成

$$\begin{aligned}&Hom_{Hg}(W_2(V_{Hg}),W_3(V_{Hg}))\otimes Hom_{Hg}(W_1(V_{Hg}),W_2(V_{Hg}))\\ &\to Hom_{Hg}(W_1(V_{Hg}),W_3(V_{Hg}))\end{aligned}$$

が$\mathcal{M}$上のHodge tripleの射として定義される。

Definition 2.3. *$W_{Hg}=((\overline{W_{dR}},\nabla,F),W_B)$を$\mathcal{M}$上のHodge tripleとする。*

(1) *W_{Hg}のDeligne complex $A_{\mathcal{D}}(W_{Hg})$を*

$$Cone\left[\left(\Gamma GF^0DR_{\log}(\overline{W_{dR}})\oplus\Gamma G(W_B)\right)\to\Gamma GDR_{\log}(\overline{W_{dR}}\mid_{\mathcal{M}_{an}})\right]$$

で定義する。ここでDRは接続に対するde Rham complex, Fはde Rham complexに対するHodge filtration, GはGodement resolutionを表す。

(2) *Deligne cohomology $H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},W_{Hg})$を*

$$H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},W_{Hg})=H^i(A_{\mathcal{D}}(W_{Hg}))$$

によって定義する。これは、通常の定義と一致する。

simpleicial Godement resolutionの積構造と、Alexander-Whiteny積を用いて$W_1\otimes W_2\to W_3$なるHodge tripleの射があるとき、

$$A_{\mathcal{D}}(W_1)\otimes A_{\mathcal{D}}(W_2)\to A_{\mathcal{D}}(W_3)$$

なる写像を得る。この積構造を用いて、Deligneバー複体$Bar_{\mathcal{D}}(E/\mathcal{M})$が

$$\begin{aligned}&Bar_{\mathcal{D}}(E/\mathcal{M})_n\\ =&\oplus_{V_0,\dots,V_n\in Irr(GL(V))}V_n^*\otimes A_{\mathcal{D}}\left(Hom^{\bullet}_{Hg}(V_{n-1}(V_{Hg}),V_n(V_{Hg}))\right)\otimes\cdots\\ &\qquad\otimes A_{\mathcal{D}}\left(Hom^{\bullet}_{Hg}(V_0(V_{Hg}),V_1(V_{Hg}))\right)\otimes V_0\end{aligned}$$

と Deligne complex に関する積写像を用いて定義される。この写像は regulator map をバー・複体のレベルで考えたものになっている。l 進 etale 実現のときと同様にして

$$H^0(Bar(E/\mathcal{M})) \to H^0(Bar_{\mathcal{D}}(E/\mathcal{M}))$$

なる準同型が定義される。混合楕円モチーフのときは l 進 etale 実現のときと同様にバー・スペクトル系列が定義されるが、その E_1-term を計算する基本的な写像は

$$H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, V_1(V_{Hg})) \otimes H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, V_2(V_{Hg})) \to H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, (V_1 \otimes V_2)(V_{Hg})) \tag{2.1}$$

である。二つの積 (1.3) と (2.1) は regulator map

$$r : H^i_{MEM(E/\mathcal{M})}(V_1) \to H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, V_1(V_{Hg}))$$

と compatible である。言い換えれば図式

$$\begin{array}{ccc}
H^1_{MEM(E/\mathcal{M})}(V_1) \otimes H^1_{MEM(E/\mathcal{M})}(V_2) & \xrightarrow{c_{MEM}} & H^2_{MEM(E/\mathcal{M})}(V_1 \otimes V_2) \\
r \otimes r \downarrow & & \downarrow r \\
H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, V_1(V_{Hg})) \otimes H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, V_2(V_{Hg})) & \xrightarrow{c_{\mathcal{D}}} & H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, (V_1 \otimes V_2)(V_{Hg}))
\end{array}$$

は可換となる。

3. Eichler-志村同型と Eisenstein element

$Sym^n(V_{Hg})(p) = S^n_{Hg}(p) = (S^n_{dR}(p), S^n_B(p), comp)$ と書く。このとき Deligne cohomology の定義から、n を正の偶数として

$$\begin{aligned}
&H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^n_{Hg}(n+1)) \\
&\simeq \mathrm{Ker}\left(H^1_B(\mathcal{M}, S^n_B(n+1)) \oplus H^1(\mathcal{M}, F^{n+1}DR(S^n_{dR})) \to H^1(\mathcal{M}_{an}, DR(S^n_{an}))\right)
\end{aligned}$$

となる。Eichler-志村同型によると、

$$\begin{aligned}
H^1_B(\mathcal{M}, S^n_B(n+1)) &\simeq H^1_{csup}(\mathcal{M}, S^n_B(n+1)) \oplus \mathbf{Q} \\
H^1_{cusp}(\mathcal{M}, S^n_B(n+1)) \otimes \mathbf{C} &\simeq S_{n+2} \oplus \overline{S_{n+2}}
\end{aligned}$$

なる分解がある。ここで S_{n+2} は重さ $n+2$ の保型尖点形式の空間でホッジタイプは $(n+1,0)+(0,n+1)$ である。従って $H^1_{\mathcal{D}}(X, S^n_{Hg}(n+1)) \simeq \mathbf{Q}$ を得る。Beilinson により regulator 写像の

$$H^1_{MEM(E/\mathcal{M})}(Sym^n(V)(n+1)) \to H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^n_{Hg}(n+1))$$

は非自明であることが知られている。これはシンボルを用いた表示から直接 Deligne cohomology の交叉理論と周期積分を計算することにより求めることもできる。$H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^n_{Hg}(n+1))$ の生成元を具体的に表そう。$\mathcal{M} \simeq SL(2,\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}$ なる同型を考える。ここで $\mathbf{H}$ $\{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ で $SL(2,\mathbf{Z})$ は τ に $g\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ で作用する。さらに多項式環 $\mathbf{Q}[u,v]$ には $(\#g(u)u, \#g(v)) = (u,v)g^{-1}$ で環準同型として右から作用し、$\mathbf{H}$ 上の関数には g^* として右から作用する。従って

$$\Gamma^1 = \Gamma(\mathbf{H}, \Omega^1_{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{Q}[u,v]_n), \quad \Gamma^0 = \Gamma(\mathbf{H}, \mathcal{O}_{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{Q}[u,v]_n)$$

にも $SL(2,\mathbf{Z})$ が右から作用する。$Z^1(\mathbf{Q}[u,v]_n)=Z^1(SL(2,\mathbf{Z}),\mathbf{Q}[u,v]_n)$ を $\mathbf{Q}[u,v]_n$ に値をもつ $SL(2,\mathbf{Z})$ 1-cocyle の空間とする。

$$\begin{aligned}Z^1_{\mathcal{D}}=\{&(e_{Zar},e_{an},e_B)\in(\Gamma^1)^{SL(2,\mathbf{Z})}\oplus\Gamma^0\oplus Z^1(\mathbf{Q}[u,v]_n)\mid\\ &de_{an}=e_{Zar},\delta e_{an}=e_B\}\end{aligned}$$

ここで δ は群のチェインに対する微分である。このとき次の命題が成立する。

命題 3.1. (1) $Z^1_{\mathcal{D}}\to H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^n_{Hg}(n+1))$ なる全射が定義される。
(2)

$$\begin{aligned}E_{Zar}=&(2\pi\mathbf{i})^{n+1}E_{n+2}(\tau)(\tau u+v)^n d\tau\\ E_{an}=&(2\pi\mathbf{i})^{n+1}\left\{\int_{\sqrt{-1}\infty}^{\tau}(E_{n+2}(\tau)-c_0)(\tau u+v)^n d\tau\right.\\ &\left.+c_0\frac{(\tau u+v)^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)x}\right\}-\frac{1}{2}n!\zeta(n+1)u^n\\ E_B(g)=&E_{an}\cdot g-E_{an}\end{aligned}$$

とすると $(E_{Zar},E_{an}.E_B)$ なる組は $Z^1_{\mathcal{D}}$ の元を定める。さらにその $H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^n_{Hg}(n+1))$ における像 $\mathbf{E}_n$ は生成元となる。$\mathbf{E}_n$ を *Eisenstein element* という。

4. Eisensten element の intersection

cup product (2.1) における $\mathbf{E}_n$ と $\mathbf{E}_m$ の像を計算する。微分作用素写像 $D=\dfrac{\partial}{\partial u_1\partial v_2}-\dfrac{\partial}{\partial u_2\partial v_1}$ とおき、写像 $I^s_{n,m}$ を

$$\begin{aligned}I^s_{m,n}:&\mathbf{Q}[u_1,v_1]_n\otimes\mathbf{Q}[u_2,v_2]_m\to\mathbf{Q}[u,v]_{n+m-2s}:\\ &f(u_1,v_1)\otimes g(u_1,v_2)\mapsto D^s(f\cdot g)\mid_{u_1=u_2=u,v_1=v_2=v}\end{aligned}$$

と定義すると $SL(2)$ の表現としての写像となる。これを用いて

$$\begin{aligned}&H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^n_{Hg}(n+1))\otimes H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^m_{Hg}(m+1))\\ &\xrightarrow{\cup}H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^n_{Hg}\otimes S^m_{Hg}(n+m+2))\\ &\xrightarrow{I^s_{n,m}}H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},S^{n+m-2s}_{Hg}(n+m+2-s))\end{aligned}$$

なる写像が得られる。この章では $I^s_{n,m}(\mathbf{E}_n\cup\mathbf{E}_m)$ 保型 L 関数の特殊値で表示する。これは Beilinson 予想の特別な場合となっている。この結果については未出版の Scholl の草稿に証明のアウトラインが書かれているが、そこでとられている方法とは異なるものである。詳しい計算については現在論文を準備中である。この値を書くのに real Deligne cohomology を用いる。W_{hg} を $\mathcal{M}$ 上の Hodge triple として、real Deligne complex $A_{\mathcal{D}}(W_{Hg},\mathbf{R})$ を

$$Cone\left[\left(\Gamma GF^0DR_{\log}(\overline{W_{dR}}\otimes\mathbf{C})\oplus\Gamma G(W_B\otimes\mathbf{R})\right)\to\Gamma GDR_{\log}(\overline{W_{dR}}\mid_{\mathcal{M}_{an}})\right]$$

と定義する。Deligne cohomology と同様に real Deligne cohomology を

$$H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, W_{Hg})_{\mathbf{R}} = H^i(A_{\mathcal{D}}(W_{Hg}, \mathbf{R}))$$

と定義する。このとき自然な準同型

$$H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, W_{Hg}) \to H^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, W_{Hg})_{\mathbf{R}}$$

が定まる。このとき $n+m-2s=l$ とおくと、$F^{l+2+s}H^1_B(\mathcal{M}_{an}, \mathbf{C}) = 0$ なので

$$\begin{aligned} &H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+2+s))_{\mathbf{R}} \\ &\simeq \mathrm{Coker}\left(H^1_B(\mathcal{M}_{an}, S^l \otimes (2\pi\mathbf{i})^{l+2+s}\mathbf{R}) \to H^1_B(\mathcal{M}_{an}, S^l \otimes \mathbf{C})\right) \end{aligned}$$

となる。従って

$$H^1_B(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+1+s)) \otimes \mathbf{R} \xrightarrow[(2\pi\mathbf{i})^{-1}]{\simeq} H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+2+s))_{\mathbf{R}}$$

なる同型を得る。さらに古典位相空間としての複素共役と複素係数の実係数上の複素共役を用いて $\pm$-part を定義して、

$$(H^1_B(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+1+s)) \otimes \mathbf{R})^- \xrightarrow[(2\pi\mathbf{i})^{-1}]{\simeq} (H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+2+s))_{\mathbf{R}})^+$$

この同型の逆写像を ψ とおく。$\mathbf{H}$ 内の局所有限サイクル $\gamma = [0\mathbf{i}, \infty\mathbf{i}]$ と $u^{n-s}v^{m-s}$ によって定まる $H^1_{B,cusp}(\mathcal{M}, S^l_{Hg}(l+2+s))$ の元を $\gamma \otimes u^{n-s}v^{m-s}$ と書く。

定理 4.1 (主定理). $\varphi(\tau)$ を重さ $l+2$ の *Hecke* 作用素に関する正規化された固有形式とし、

$$r(f) = \begin{cases} \mathbf{i}\,\mathrm{Im}(\varphi(\tau)(u\tau+v)^l d\tau) & (s \text{ is even}) \\ \mathrm{Re}(\varphi(\tau)(u\tau+v)^l d\tau) & (s \text{ is odd}) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\lambda_{n,m,s}(\varphi)(r(\tau), \gamma \otimes u^{n-s}v^{m-s}) = (r(\tau), \psi(I^s_{n,m}(\mathbf{E}_n \cup \mathbf{E}_m))$$

が成立する。ここで

$$\lambda_{n,m,s}(\varphi) = n!m!(n+m+1-s)!L(\varphi, n+m+2-s)$$

である。

Remark 4.2. この範囲では L 関数のオイラー積表示から $L(\varphi, n+m+2-s) \neq 0$ であることが容易にわかる。

References

[KT] Kimura,K., Terasoma, T., Relative DGA and mixed ellitic motives, preprint

[HM] Hain, R., Matsumoto, M., Universal mixed elliptic motives, in preparation.